Holographic optics : Forcella - Mariotti - Amariti

Analogia tra ottica e sp. tempo curvo : prendo una geodetica di luce ed estremizzo la stessa.

VACUUM SPACETIME

$\delta S[g_{\mu\nu}] = 0 \quad \longleftrightarrow$

E, B

FLAT

$\delta S[n] = 0 \Rightarrow n = g$ GEOMETRIC OPTICS

MACRO FLAT

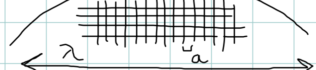
$D_i = \varepsilon_{ij} E_j$

$B_i = \mu_{ij} H_j$ MAXWELL WAVE EQUATIONS

$\varepsilon_{ij} = \mu_{ij} = \frac{\sqrt{-g}\, g^{ij}}{g_{00}}$

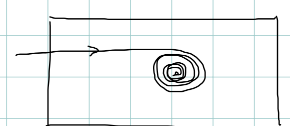
But $\varepsilon_{ij} \neq \mu_{ij}$, $\mu_{ij} = 1$ x la maggior parte dei materiali $\rightarrow$ difficile avere fenomeni esotici nei materiali

ADESSO $\rightarrow$ metamaterials (a scala abb piccola)



$\Longrightarrow$ if $\lambda \gg a \rightarrow \varepsilon, \mu$ efficaci

(1) PHOTONIC BLACK HOLES :



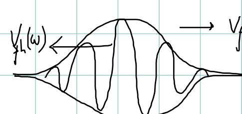
$\Longleftarrow$ APPLICATIONS

(2) INVISIBILITY

} sto nascondendo il cubetto!

Altri 2 effetti :

1) Negative refractive index (NRI)



$\leftarrow$ No dissipazione, debole dispersione

$\rightarrow v_p \simeq \vec{S}$

La v_{fase} in una direz e la v_g nell'altra!

NRI 1924

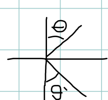
1967 : $n^2 = \varepsilon\mu \rightarrow$ no dissipazione $n = \pm\sqrt{\varepsilon\mu}$

$\begin{cases} \varepsilon > 0, \mu > 0 \rightarrow n = +\sqrt{\varepsilon\mu} \\ \varepsilon < 0, \mu < 0 \rightarrow n = -\sqrt{\varepsilon\mu} \end{cases}$

2001 $\rightarrow$ effetto riprodotto sperimentalmente

Nella ph di alte energie, ci sono fenomeni che manifestano NRI ?

Si manifesta in:

- legge di Snell $\rightarrow$  PHENO : idea, studiare QGP
- effetto Doppler $\longrightarrow$ eff. Doppler inverso, effetto Cherenkov inverso
- lensing $\rightarrow$ perfect lensing (?)

CLAIM : supponiamo che
1) il sistema sia descritto da correnti conservate : descrizione HYDRODINAMICA
2) il sist idrodinam è isotropo, omogeneo
3) il sistema manifesta invarianza relativistica, temperatura finita $T \neq 0$ e densità di carica finita $\rho \neq 0$

ALLORA : il sistema sviluppa NRI per frequenze sufficientemente BASSE

Non ci si aspetta sia un fenomeno proprio dello strong coupling, ma più generico dalla hydrodyn.
Lo verificheremo esplicitamente per strong coupling.

EM & risposta lineare:

Di solito:

$\varepsilon(\omega)$, $\mu(\omega)$ } Con spatial dispersion $\Rightarrow$ E $B(+D)$ $\xrightarrow{\text{such that}}$ $D_i = \varepsilon_{ij}(\omega k)E_j$

E, B, H, D

$\mu(\omega)$ compare come effetto all'ordine k^2 di questo approccio.

$$\varepsilon_{ij}(k\omega) = P^T_{ij}\,\varepsilon^T(\omega,k) + P^L_{ij}\,\varepsilon(\omega,k) \qquad P^T_{ij} = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \qquad P^L_{ij} = \frac{k_i k_j}{k^2}$$

RELAZIONI DI DISPERS.

$$\begin{cases} \varepsilon^T(\omega,k) = \dfrac{k^2}{\omega^2} = n^2 \\ \varepsilon_L(\omega,k) = 0 \end{cases}$$

$$\varepsilon^T = \varepsilon(\omega) + \dots \;\rightarrow\; \frac{k^2}{\omega^2}\left(1 - \frac{1}{\mu(\omega)}\right) + \dots$$

↳ è una μ_{eff},

(sul Landau $\mu = \varepsilon^T - \varepsilon^L$)

→ quella che si usa in lab.

↳ precisely:

$$1 - \frac{1}{\mu(\omega)} = \omega^2 \lim_{k\to 0} \frac{\varepsilon_T(\omega k) - \varepsilon_L(\omega k)}{k^2}$$

dà $\varepsilon(\omega)\mu(\omega) = \dfrac{k^2}{\omega^2} = n^2(\omega)$

Campo em esterno A_j sul materiale. In regime lineare la corrente è data da: $J_i = G_{ij} A_j$

$$G_{ij}(x-x', t-t') = -i\Theta(t-t')\langle [J_i(x,t), J_j(x',t')] \rangle$$

in trasformata di Fourier: $G(\omega,k) = P^T G^T + P^L G^L$

si trova, se l'accoppiamento è $qA_\mu J^\mu$

$$\varepsilon^L(\omega,k) = 1 - \frac{4\pi q^2}{\omega^2} G^L(\omega,k)$$

$$\varepsilon^T(\omega,k) = 1 - \frac{4\pi q^2}{\omega^2} G^T(\omega k)$$

$$\begin{cases} \varepsilon(\omega) = 1 - \dfrac{4\pi q^2}{\omega^2} G^0(\omega) \\ \mu(\omega) = 1 \Big/ 1 + 4\pi q^2 G^2(\omega) \end{cases}$$

ONDA PIANA: $e^{i\omega t - ikx} = e^{i\omega(t - Re(n)x)}\, e^{-\omega Im(n)x}$

$k = n\omega \qquad v_p(\omega) = 1/Re(n)$

$$\vec{S} = Re\left[E^* \wedge B - \frac{\omega}{2}\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \vec{k}} E_i^* E_j\right] = Re\left[\frac{n}{\mu}\right](E^T)^2 \hat{k}^2$$

NOTA: il modo più semplice per fare NRI è:

$$\begin{cases} \varepsilon(\omega) = 1 - \dfrac{\omega_p^2}{\omega^2} \\ \mu(\omega) = 1 - \dfrac{\omega_*^2}{\omega^2} \end{cases}$$

Def l'indice $n_{DL} = |\varepsilon(\omega)|\,Re(\mu(\omega)) + |\mu(\omega)|\,Re(\varepsilon(\omega)) < 0$ such that $n_{DL} < 0 \Leftrightarrow$ NRI

- se non c'è dissipaz., devono essere $\varepsilon, \mu < 0$ entrambi, altrimenti n è immaginario.
- se c'è dissipazione, basta che uno abbia $Re(\;) < 0$ e giusto $Im(\;)$.

MAIN EXAMPLE

Mezzo idrodinamico con corrente J conservata t.c. $qJ_\mu A^\mu$, con A_μ campo e.m. esterno

$$\langle J^T J^T \rangle = \frac{i\omega B}{i\omega - Dk^2} \longrightarrow \text{è una vera funz di risp?}$$

1) $D > 0$ 2) $B > 0$ | Causalità: poli in $Im(\omega) < 0$; stabilità: ? $Im(?) < 0$

trovo

$$\begin{cases} \varepsilon(\omega) = 1 - \dfrac{4\pi q^2}{\omega^2} B \\ \mu(\omega) = \left[1 + \dfrac{4\pi q^2 i BD}{\omega}\right]^{2^\circ \text{ order in } q} \\ \quad \downarrow \text{esatto} \\ \quad = \left[1 - \dfrac{4\pi q^2 i BD}{\omega}\right]^{-1} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ trovo $\omega^2 < 4\pi q^2 B \Leftrightarrow n_{DL} < 0$

$\Downarrow$

NRI per ω abbastanza piccole!

Che sistema ha queste proprietà? : HYDRODIN. Rel. $T\neq 0$, $\rho \neq 0$

$$\langle JJ\rangle = \frac{i\omega B}{i\omega - Dk^2} + P(k,0) \quad \text{e trovo} \quad B = \frac{\rho^2}{\varepsilon + P} \qquad D = \frac{\eta}{\varepsilon + P}$$

suppongo

NOTAZIONI
- ε densità di energia
- P pressione
- η shear viscosity
- ρ densità di carica

- applicabile all'idrodinamica relativistica (QGP?)
- in th delle stringhe posso fare i calcoli anche fuori dal regime idrodinamico.

(Si trovano frequenze ~ microonde?)

Part II : OPTICS ⟷ AdS/CFT : negative refraction

- A calculable model $(\varepsilon(\omega), \mu(\omega))$ using AdS/CFT ; toy model

ci servono: $T_{\mu\nu} \Rightarrow g_{\mu\nu}$ → Einstein-Maxwell theory in 5D
$J_\mu \Rightarrow A_\mu$

- Ho un background $T\neq 0, \rho\neq 0$ → Scelgo soluzione di BH carico in 5D (che dà la temperatura T e la ρ)

def l = raggio
e = 5D EM coupling
T, Σ → potenziale chimico

metric ansatz

$$ds^2 = \frac{(2-a)^2 l}{16 b^2}\frac{1}{u}\left(dx^2 - f(u)\,dt^2\right) + \frac{l^2}{4}\frac{du^2}{u^2 f(u)}$$

con $u \to 0$ BD, $u \to 1$ Horiz } Cond 5 dim.

$$\begin{cases} f(u) = (1-u)(1+u-au^2) \\ A_t = -\frac{u}{2b}\sqrt{\frac{3}{2}}\,a + \Sigma \end{cases} \qquad T = \frac{2-a}{4\pi b} \qquad \Sigma = \frac{1}{2b}\sqrt{\frac{3}{2}a} \qquad 0 < a < 2$$

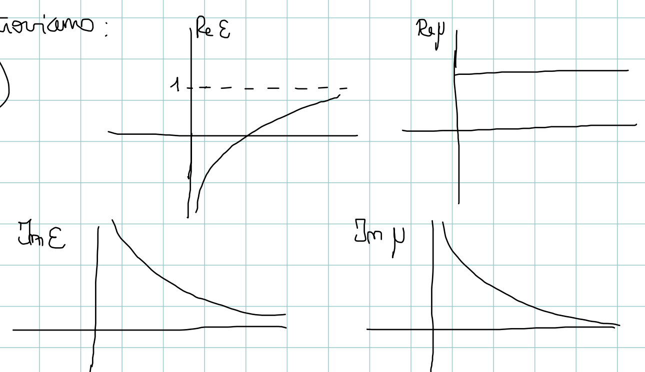
$\langle J_\mu J_\nu \rangle = G^R_{\mu\nu}$, $G^R_{\mu\nu} = q^2 G^A + q^4 G^B + \dots$ Corrisp a trasc. l'interazione em nei loop, coerente con l'approx di campo esterno.

e dovremo espandere $G^R_T = G^{(0)}_T(\omega) + k^2 G^{(2)}_T(\omega) + O(k^4)$

Facciamo il conto per charged 5D BH, troviamo:

$$\varepsilon(\omega) = 1 + a^2 \frac{\cancel{\#}}{b(1+a)}\left(\frac{1}{\omega}\frac{(2-a)^2}{2(1+a)} - \frac{1}{\omega^2}\frac{3a}{b}\right)$$

$$\mu(\omega) = 1 + q^2 \frac{i}{\omega}\frac{a\,\#}{2(1+a)b} + \dots$$



↳ compensano singolari per $\omega \to 0$, già visti per i semiconduttori

DIVERGENZE UV → arbitrarietà $c(\omega^2 - k^2)$ in G
L'arbitrarietà è eliminata imponendo che a grandi ω il sistema risponda come il vuoto alla perturbazione luminosa & che, analogamente:
$\lim_{\omega\to\infty} \mathrm{Re}\,\varepsilon = 1$ per k fissato.

Regimi di validità: frequenze non troppo piccole.

On shell: $\varepsilon(\omega)\mu(\omega) = n^2(\omega) = \frac{k^2}{\omega^2}$ → per restare nel regime approx devo restare a $|k|^2 \ll 1 \Leftrightarrow |n(\omega)|^2 \omega^2 \ll 1$

altrimenti devo considerare $\varepsilon_T(\omega,k) = n^2$ nella piena (forte) dipendenza da k

Parte III:

Cosa succede ai poli? Avevamo: $G_1(\omega,k) = \dfrac{i\omega B}{i\omega - Dk^2}$ con $|k|^2 = |n|^2\omega^2 << 1$

↳ in questa regione non vale l'approssimazione

(Nota: per $\frac{\Sigma}{T} << 1$ il regime di ω per cui $n_{DL} < 0$ è fuori da $|k|^2 << 1$)

Bisogna tener conto della forte non località (dispersione spaziale)

Nell'eq. di dispersione: $\varepsilon \cdot \mu \longrightarrow \varepsilon_T$

$\varepsilon_T(\omega,k) = \dfrac{k^2}{\omega^2}$

$1 - \dfrac{A}{i\omega - Dn^2\omega^2} = n^2$

↳ 2 soluzioni $n_{1,2} \to$ ALW (Additional light wave)

Il verificarsi di questo fenomeno dipende dalla presenza almeno di un polo nella $G_1(\omega,k)$.

↳ $= \dfrac{i\omega B}{i\omega - Dk^2 + \omega_0 + i\Gamma(T,\Sigma)}$

γ ⟿ v ___ , c ___ } e ; h, e

Linguaggio 1957 Pekar Crystal Optics

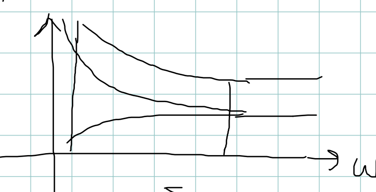
↳ Bound state e-h → eccitato da γ diventa eccitone; alla frequenza ω_0 di risonanza emette una seconda onda luminosa.

Se proviamo a risolvere le eq. x trovare n abbiamo:

NOTA: Γ = vita eccitone

- Si può def un indice di rif. efficace $n_{eff} = \dfrac{\varepsilon_0 + n_1 \cdot n_2}{n_1 + n_2}$ s.t. soddisfa Fresnell e K.K. rel.
- ✱ In generale n_{eff} non dà indicazioni sulla rifrazione, ma seleziona quale indice si propaga ⟹ # luci = # poli (+1 nel caso trasverso)
- ✱ Dipendenza dalla vita dell'eccitone $\Gamma(T,\Sigma)$ ⟹ grande Γ → da 2 a 1 onda. succede che

[Analogia: caso longitudinale carico. Qui, però ho $G_L = \dfrac{i\omega B}{i\omega - Dk^2 + A\omega^2} + \dfrac{E}{k^2 - 3a}$ [quindi 2 poli ⟹ 2 onde]



→

$\frac{\Sigma}{T} < x_0$: 2 onde si propagano

$\frac{\Sigma}{T} > x_0$: si propaga 1 onda

---

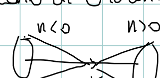
§ RIFRAZIONE ALW

Vettore di Poynting $S = \mathrm{Re}\left(E^* \times B - \dfrac{\omega}{2}\dfrac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial k} E_i^* E_j\right)$ → Se c'è grande dispersione ci sono correzioni in k a S ⟹ non predicibilità del segno della rifrazione in assenza di un modello microscopico. [Il caso precedente trasverso, carico, con l'espansione in k, è ancora predicibile.]

- Impurità → $\overline{\qquad + i\Gamma_R}$
- Poli non hydro: Stereometa materials
- non rel core
- 2+1 dimensions
- Superconduttori
- Bipolar function in graphene

DISCUSSION

|| Cono di Cherenkov } ma allora:



ovvero sarebbe un segnale osservabile!